



دفترچه سؤالات مرحله دوم

دومین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۹۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سؤالات	
	مسأله‌های تشریحی	سؤالات چند گزینه‌ای
۳۰۰	۶	-

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

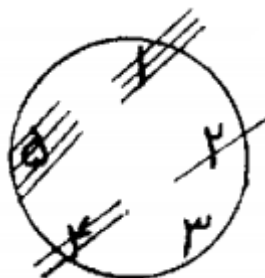
توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

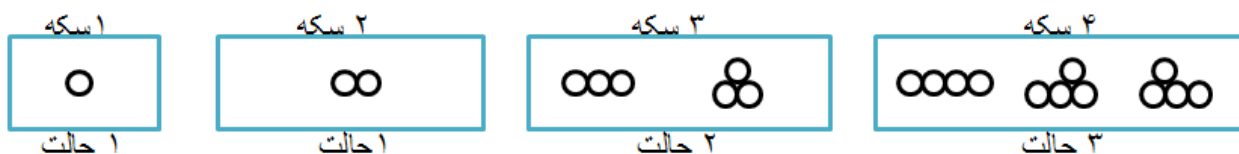
- این آزمون شامل **۶ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۰۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سؤالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- اعداد $1, 2, \dots, n$ را روی یک دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم. حال از عدد ۱ شروع کرده و اعداد را یکی در میان حذف می‌کنیم تا سرانجام یک عدد باقی بماند. مثلا برای $n = 5$ به ترتیب اعداد ۲، ۴، ۱ و ۵ حذف شده و عدد ۳ باقی می‌ماند.



برنامه‌ای بنویسید که عدد n را بگیرد و اعدادی را که حذف می‌شوند به ترتیب نشان دهد و عدد باقی‌مانده را مشخص کند.

۲- n سکه داریم. این سکه‌ها را در یک ردیف یا دو ردیف بدین ترتیب می‌چینیم که در ردیف دوم هر سکه درست با دو سکه زیرش در تماس باشد. (برای ۱ تا ۴ سکه ترتیب قرار گرفتن سکه‌ها و تعداد حالات مشخص شده است).



الف) اگر S_n تعداد حالات چیندن سکه در دو ردیف (به صورت مذکور در بالا) باشد ثابت کنید:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

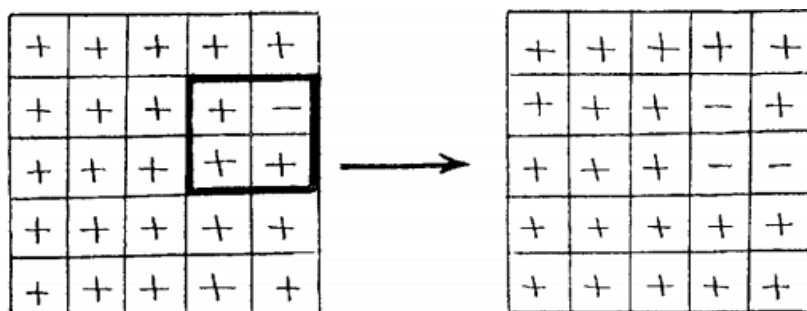
ب) اگر بخواهیم سکه‌های قرار گرفته در ردیف بالا حتما به هم چسبیده باشند تعداد حالات چیندن n سکه را در دو ردیف (با شرایط اخیر) حساب کرده بر حسب n بنویسید.

۳- یک مربع 5×5 خانه را در نظر بگیرید. در یکی از خانه‌ها علامت «-» و در بقیه علامت «+» گذاشته‌ایم. یک بازی با قانون زیر تعریف می‌کنیم:

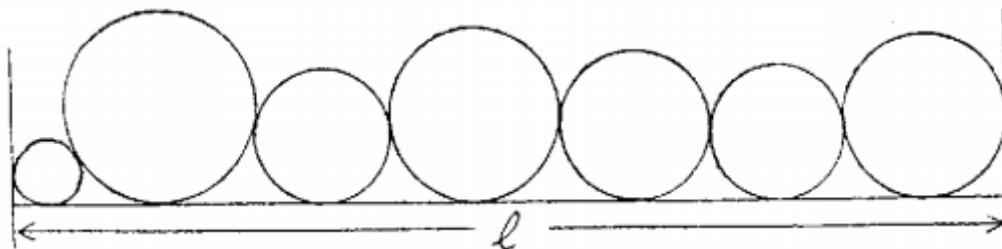
در هر مرحله می‌توان یک مربع با ضلع بزرگ‌تر از یک انتخاب کرده و تمام علامت‌های داخل آن را عوض کرد. («+» به «-» و «-» به «+» تبدیل شود). پایان بازی وقتی است که تمام علامت‌ها «+» شوند. در این حالت می‌گوییم که بازی جواب دارد. الف) نشان دهید که اگر علامت «-» در خانه‌ی وسط، یعنی خانه‌ای که در سطر سوم و ستون سوم قرار دارد، گذاشته شود بازی جواب دارد. مراحل رسیدن به جواب را نشان دهید.

ب) ثابت کنید که تنها حالت ممکن برای جواب داشتن بازی حالت الف است.

در شکل زیر یک مرحله از یک بازی نشان داده شده است.



۴- m دایره با شماره‌های ۱ تا m و با شعاع‌های r_1, r_2, \dots, r_m و پاره‌خطی بطول l داده شده‌اند. می‌خواهیم تعدادی از این دایره‌ها را انتخاب کنیم بطوری که آن‌ها بتوانند پاره خط را مانند شکل زیر بپوشانند.



برنامه‌ای بنویسید تا پس از دریافت ورودی‌ها، شماره‌های دایره‌های انتخاب شده را به ترتیب از چپ به راست بنویسد. در صورتی که مسئله بیش از یک جواب داشته باشد، یک جواب کافی است. اگر مسئله جواب ندارد، آن را نیز مشخص نمایید.

۵- می‌خواهیم n ماتریس M_1 تا M_n را در هم ضرب کنیم ($M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$) فرض کنید ابعاد ماتریس‌ها به گونه‌ای هستند که حاصلضرب هر دو ماتریس مجاور امکان پذیر است می‌خواهیم تعداد ترتیب‌های مختلف برای انجام این ضرب را به دست آوریم. این ترتیب‌ها را می‌توان با استفاده از پرانتز نشان داد. فرض کنید T_n تعداد حالات پرانتزگذاری این ضرب باشد. مثلاً $T_5 = 5$ و ترتیب‌های مورد نظر بقرار زیرند:

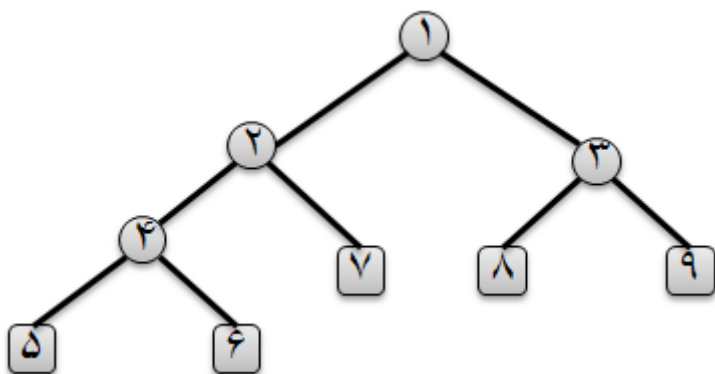
$$\begin{aligned} & M_1 \times ((M_2 \times (M_3 \times M_4))) \\ & M_1 \times ((M_2 \times M_3) \times M_4) \\ & (M_1 \times M_2) \times (M_3 \times M_4) \\ & (M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4 \\ & ((M_1 \times M_2) \times M_3) \times M_4 \end{aligned}$$

الف) فرمولی برای T_n بر حسب T_i ها ($i < n$) بنویسید و آن را اثبات کنید.

ب) برنامه‌ای بنویسید تا با دریافت n ، T_n را در خروجی چاپ نماید.

۶- تعاریف زیر را برای درخت دودویی در نظر بگیرید:

تعریف ۱: یک درخت دودویی متشکل از تعدادی نقاط داخلی و تعدادی نقاط خارجی موسوم به گره‌ها می‌باشد. از هر گره داخلی دو گره (گره چپ و گره راست) که با لبه‌های چپ و راست به آن متصل می‌شوند. از گره‌های خارجی هیچ گره‌ای منشعب نمی‌گردد. بطور مثال درخت دودویی زیر را در نظر بگیرید:



گره‌های مربع شکل گره‌های خارجی و گره‌های دایره شکل گره‌های داخلی می‌باشند. گره ۱ موسوم به ریشه درخت می‌باشد.

تعریف ۲: طول یک مسیر از ریشه درخت B به u یک گره (داخلی یا خارجی) در درخت مساوی تعداد گره‌ها در مسیر منتهای یک است. طول مسیر را با $l(u)$ نشان می‌دهیم.

در مثال بالا داریم $l(۱) = ۰$ و $l(۷) = ۲; l(۵) = ۳$.

الف) فرض کنید B یک درخت دودویی با m گره خارجی u_1, \dots, u_m باشد.

$$\text{ثابت کنید } ۱ = \sum_{j=1}^m ۲^{-l(u_j)}$$

برای قسمت «ب» قرار ده

$$E(B) = \sum_u l(u) = \text{جمع طول مسیرها از ریشه به همه گره‌های خارجی}$$

$$I(B) = \sum_u l(u) = \text{جمع طول مسیرها از ریشه به همه گره‌های داخلی}$$

$$\text{ب) ثابت کنید } E(B) = I(B) + ۲n$$